

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך – $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על ארבע מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 25 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. ביום ראשון יצא אודי ברכיבה על אופניים ממטולה לכיוון טבריה. באותה שעה בדיוק יצאה רעות ברכיבה על אופניים מטבריה לכיוון מטולה, ורכבה באותה הדרך. כל אחד מן הרוכבים רכב במהירות קבועה.
כעבור 2 שעות נפגשו שני רוכבי האופניים.
הזמן שנדרש לאודי כדי לעבור את הדרך ממטולה לטבריה גדול ב- 54 דקות מן הזמן שנדרש לרעות לעבור דרך זו.

 - א. מצא את היחס בין מהירות הרכיבה של רעות ובין מהירות הרכיבה של אודי.
 - ב. מצא כמה זמן נדרש לכל אחד מן הרוכבים כדי לעבור את כל הדרך שבין מטולה ובין טבריה.

ביום שני יצאו 2 רוכבי האופניים יחד מטבריה לכיוון מטולה באותו הזמן. הם רכבו באותה הדרך ובאותן המהירויות כמו ביום ראשון. רעות הגיעה למטולה ומייד הסתובבה וחזרה לכיוון טבריה. היא נפגשה עם אודי לאחר שעברה מרחק של 7 ק"מ ממטולה.

 - ג. מצא את אורך הדרך בין מטולה ובין טבריה.
 - ד. מצא את המהירות שבה רכב כל אחד משני הרוכבים.
2. נתונה סדרה חשבונית ובה $2n + 1$ איברים (n הוא מספר טבעי).
איברי הסדרה הם $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ והפרש הסדרה הוא d .

 - א. הוכח כי ההפרש בין סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ובין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שווה לאיבר האמצעי בסדרה.
 - ב. נסמן ב- T את ההפרש בין סכום האיברים ב- n המקומות האחרונים ובין סכום האיברים ב- n המקומות הראשונים.
ג. הבע את T באמצעות d ו- n .

נתון:

 - סכום כל איברי הסדרה שווה לסכום האיברים ב- $2n$ המקומות האחרונים.
 - סכום האיברים הראשון והאחרון הוא 204.
 - $T = 3,468$.
 - ג. מצא כמה איברים יש בסדרה.

3. בחממה גדולה של פרחים יש אך ורק פרחים לבנים וסגולים. ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים לבנים גדולה פי 2.25 מן ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים סגולים.
- א. חשב את אחוז הפרחים הסגולים בחממת הפרחים.
- בחממה זו, לכמה מן הפרחים הלבנים, ורק להם, יש עלים גדולים. לשאר הפרחים יש עלים קטנים. ירדן בחרה באקראי שני פרחים. ההסתברות שירדן בחרה פרח אחד שיש לו עלים קטנים ופרח אחד שיש לו עלים גדולים היא 0.455.
- ב. (1) חשב את אחוז הפרחים בחממה שיש להם עלים גדולים.
- (2) חשב את ההסתברות שירדן בחרה פרח סגול, אם ידוע שרק לאחד מן הפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.
- ג. כינרת הכינה זר מ־7 פרחים לבנים בדיוק, שנבחרו באקראי בחממה. חשב את ההסתברות שיש בזר פרח אחד לפחות שיש לו עלים גדולים ופרח אחד לפחות שיש לו עלים קטנים.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. מנקודה A יוצאים שני ישרים, המשיקים למעגל בנקודות B ו-C (ראה סרטוט).

נתון כי $\angle CAB = 90^\circ$.

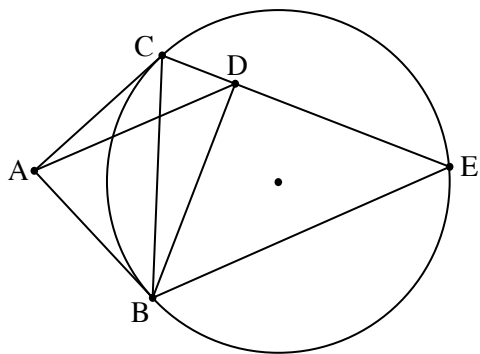
BE ו-CE הם מיתרים במעגל.

המעגל החוסם את המשולש ABC חותך את המיתר CE בנקודה D.

א. הוכח כי $BD = DE$.

ב. הוכח כי $\triangle ADB \sim \triangle CEB$.

ג. הוכח כי $S_{\triangle CEB} = 2 \cdot S_{\triangle ADB}$.



5. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

נתון כי $\angle BAC = 80^\circ$.

נסמן את הזווית AOB ב- α , ואת הצלע AB ב- k .

א. הוכח כי $\cos \alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}$.

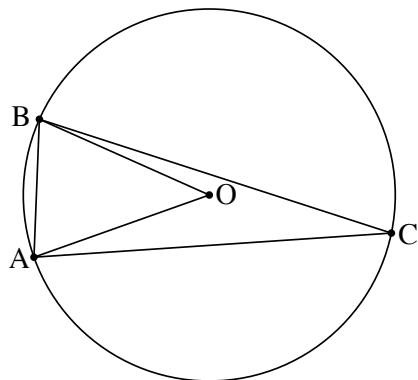
נתון כי $k = \frac{3}{4}R$.

ב. הבע באמצעות R (בלבד) את שטח המשולש ABC.

נסמן ב- r את רדיוס המעגל החסום במשולש AOB.

ג. חשב את היחס $\frac{R}{r}$.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- (3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
- (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $f(k) = 1$, $t < k$, t הוא פרמטר.

ג. קבע איזה מן הביטויים שלפניך גדול יותר. נמק את קביעתך.

$$\int_t^k f(x) dx \quad \text{או} \quad \int_t^k (f(x))^2 dx$$

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = -1$ ו- $x = -8$.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos(mx) + \cos(2x)$, המוגדרת לכל x . m הוא פרמטר השונה מאפס.

נתון כי בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$, שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא -2 .

א. הוכח כי m הוא מספר שלם שמתחלק ב-4 ללא שארית.

הצב $m = 4$ וענה על סעיפים ב-ד שלפניך.

ענה על סעיף ב בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ענה על סעיפים ג-ד בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

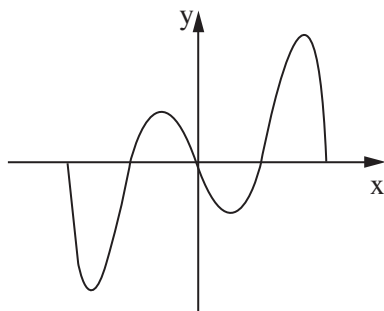
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. הסבר את שיקולך.

נתונה פונקציה $k(x)$ המקיימת: $k'(x) = f(x)$, $k(0) = 0$.

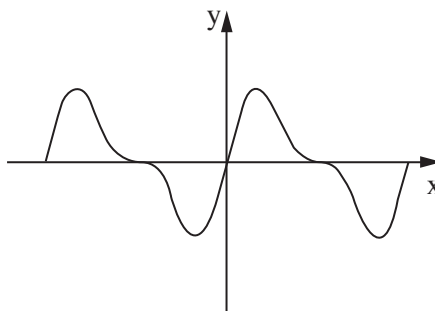
ד. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$.

היעזר בתשובתך על סעיף ג וקבע איזה מן הגרפים שלפניך מתאים לגרף הפונקציה $k(x)$. נמק את קביעתך.

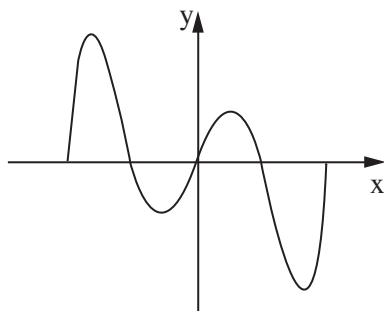
גרף ב



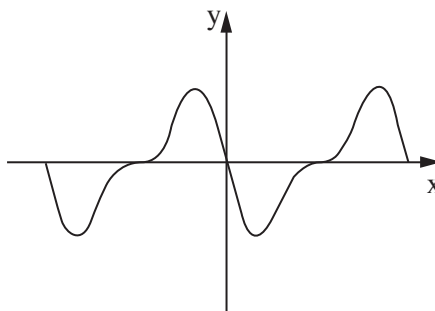
גרף א



גרף ד



גרף ג



8. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$, $g(x) = \frac{x-3}{x-1}$.

ענה על סעיף א בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

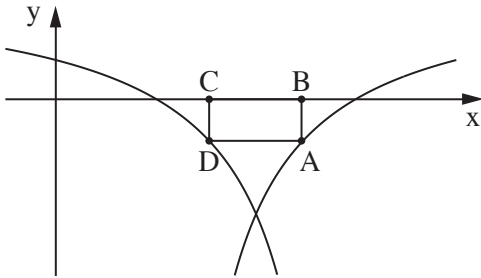
א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בסרטוט שלפניך מתואר חלק מן הגרף של הפונקציה $f(x)$, חלק מן הגרף של הפונקציה $g(x)$, ומלבן החסום ביניהם ובין ציר ה- x .

צלע BC של המלבן מונחת על ציר ה- x , והצלע הנגדית, AD , מחברת

בין נקודה על הגרף של $f(x)$ ובין נקודה על הגרף של $g(x)$, כמתואר בסרטוט.



נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A .

ב. קבע מהו תחום הערכים האפשרי של t .

ג. (1) הבע באמצעות t את אורך הצלע AB .

(2) הוכח ששיעור ה- x של הנקודה D הוא $4-t$.

(3) הבע באמצעות t את שטח המלבן $ABCD$.

ד. מצא את t שבעבורו שטח המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

בהצלחה!