

מתמטיקה

4 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה, גאומטרייה אנליטית, הסתברות
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש
יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל פעולותיכם, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל פעולותיכם, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה, גאומטרייה אנליטית, הסתברות

1. היישובים A, B ו-C ממוקמים על כביש ישר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.



המרחק בין היישוב B ליישוב C הוא 115 ק"מ, והמרחק בין היישוב B ליישוב A הוא 144 ק"מ.

משאית ומכונית יצאו באותו הזמן מן היישוב B.

המכונית נסעה במהירות קבועה לכיוון היישוב C, והמשאית נסעה במהירות קבועה לכיוון היישוב A.

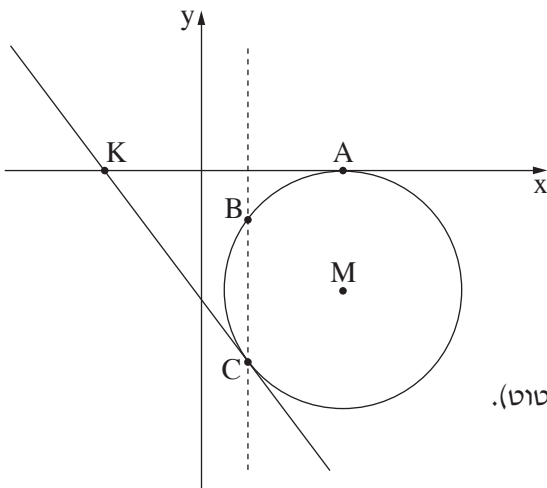
מהירות המכונית הייתה גבוהה ב-20 קמ"ש ממהירות המשאית.

המכונית הגיעה ליישוב C, התעכבה ביישוב רבע שעה, ואז נסעה בחזרה ליישוב B באותה המהירות שבה נסעה קודם.

כאשר המשאית הגיעה ליישוב A, המכונית הייתה בדרכה חזרה ליישוב B ובמרחק 46 ק"מ מן היישוב C.

א. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

ב. באיזה מרחק מן היישוב A הייתה המשאית כאשר המכונית הגיעה ליישוב C?



2. בסרטוט שלפניכם מתואר מעגל שמרכזו, M , נמצא ברביע הרביעי.

המעגל משיק לציר ה- x בנקודה $A(6, 0)$.

נתון: רדיוס המעגל הוא 5.

א. (1) מצאו את שיעורי מרכז המעגל, M .

(2) רשמו את משוואת המעגל.

המעגל חותך את הישר $x = 2$ בנקודות B ו- C , כמתואר בסרטוט.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות B ו- C .

הישר המשיק למעגל בנקודה C חותך את ציר ה- x בנקודה K (ראו סרטוט).

ג. מצאו את שיעורי הנקודה K .

ד. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה K והוא משיק לישר $x = 2$.

ה. (1) מצאו את אורך KM .

(2) האם המעגל שאת משוואתו מצאתם בסעיף ד, משיק למעגל המתואר בסרטוט (שמרכזו M)? נמקו את תשובתכם.

3. בקופה יש 39 מטבעות: 21 מטבעות של שני שקלים,

12 מטבעות של חמישה שקלים,

ו-6 מטבעות של עשרה שקלים.

הוציאו מן הקופה באקראי שני מטבעות ללא החזרה.

א. מהי ההסתברות ששני המטבעות שהוציאו היו זהים?

ב. ידוע ששני המטבעות שהוציאו היו זהים.

מהי ההסתברות שהסכום של שני המטבעות שהוציאו היה גבוה מ-5 שקלים?

החזירו את כל המטבעות לקופה והוסיפו x מטבעות של עשרה שקלים לקופה.

נתון: לאחר ההוספה, ההסתברות להוציא מן הקופה באקראי ללא החזרה שני מטבעות של חמישה שקלים היא $\frac{1}{15}$.

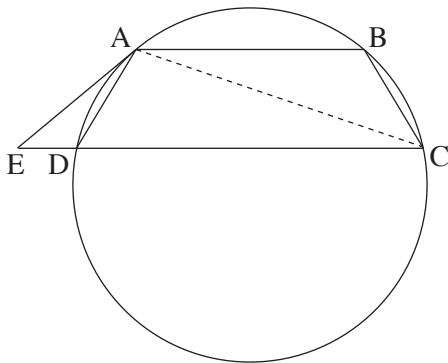
ג. מצאו את x .

ד. האם ההסתברות להוציא מן הקופה באקראי (ללא החזרה) שני מטבעות זהים גדלה לאחר ההוספה,

קטנה או נשארה ללא שינוי? נמקו.

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. המרובע ABCD הוא טרפז החסום במעגל. $AB \parallel DC$. המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה E (ראו סרטוט).



א. הוכיחו: ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. הוכיחו: $\angle ABC = \angle ADE$.

ג. הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

נתון: שטח המשולש ABC גדול פי 4 משטח המשולש ADE,

ד. $BC + ED = 21$.

ה. (1) מצאו את אורך הצלע ED.

ו. (2) מצאו את אורך הצלע AB.

5. בסרטוט שלפניכם מתואר משולש ABC.

נתון: $BC = 1.5AC$,

$\angle ACB = 52^\circ$,

שטח המשולש ABC הוא 38.

א. מצאו את אורך הצלע AC.

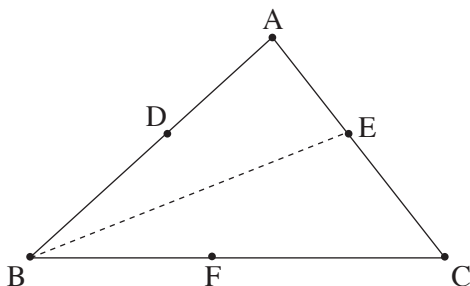
ב. מצאו את גודל הזווית ABC.

נתון: הנקודה E נמצאת על הצלע AC כך ש- BE חוצה את הזווית ABC.

ג. מצאו את אורך BE.

נתון: הנקודות D ו- F נמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך שהמרובע BDEF הוא מעוין.

ד. מצאו את אורך צלע המעוין BDEF.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש

6. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} + a$. a הוא פרמטר.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (אם צריך, הביעו באמצעות a).
- נתון כי נקודת המינימום של הפונקצייה $f(x)$ נמצאת על ציר ה- x .
- ג. מצאו את a .

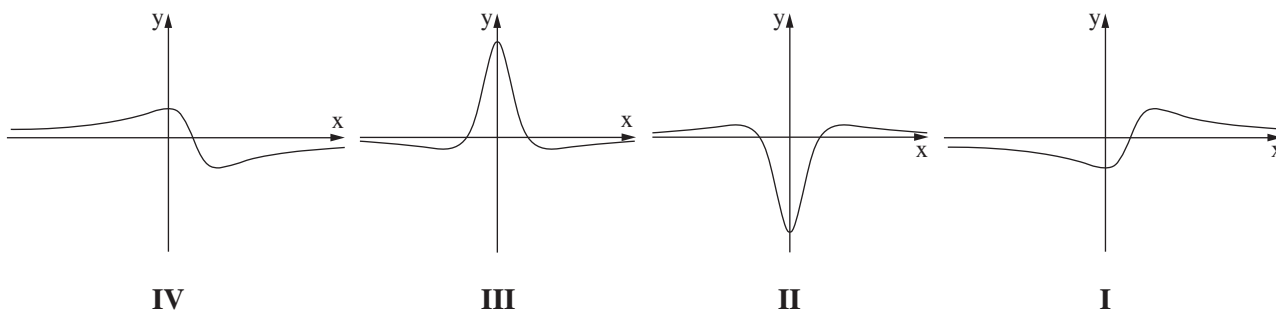
הציבו בפונקצייה $f(x)$ את a שמצאתם בסעיף ג, וענו על סעיפים ד-ו.

- ד. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = 3 \cdot f(x)$.

- ו. (1) אחד מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

(2) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$, על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי הצירים.



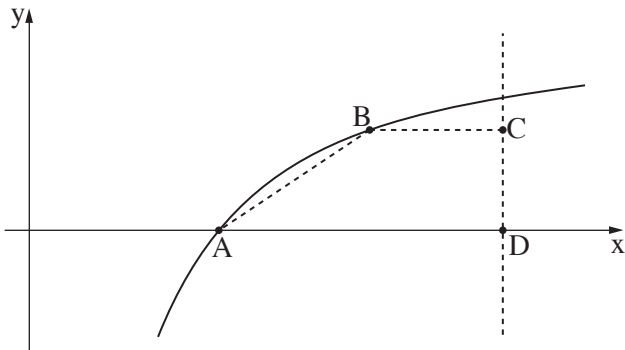
7. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{9x + 45}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x) + c$. c הוא פרמטר.

- נתון כי הישר $y = 8$ משיק לגרף הפונקצייה $g(x)$.
- ה. מצאו את c (ציינו את שתי האפשרויות).

8. בסרטוט שלפניכם מתואר חלק מגרף הפונקצייה $f(x) = 1 - \frac{4}{x}$ בתחום $x > 0$.



גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה A.

נקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$,

ברביע הראשון, משמאל לישר $x = 10$.

מן הנקודה B מעבירים ישר המקביל לציר ה- x

וחותך את הישר $x = 10$ בנקודה C.

נתון: $D(10, 0)$.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

ב. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה B ב- t .

ג. הביעו באמצעות t את שיעורי הנקודות B ו-C.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה B שבעבורה שטח הטרפז ABCD הוא מקסימלי.

ה. הראו כי השטח המקסימלי של הטרפז ABCD הוא 2.

בהצלחה!