

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

- פרק ראשון – אלגברה והסתברות
 - פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
 - פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
- יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

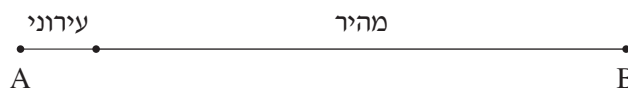
בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. קטע הכביש שבין יישוב A ליישוב B מחולק לשניים: קטע כביש עירוני וקטע כביש מהיר, כמתואר בסרטוט. האורך של קטע הכביש המהיר גדול פי 7 מן האורך של קטע הכביש העירוני.



- שתי מכוניות א', ב' יצאו באותה השעה, ונסעו זו לקראת זו: מכונית א' יצאה מיישוב A ומכונית ב' יצאה מיישוב B. במשך כל אותו היום מהירות הנסיעה של כל אחת מן המכוניות בקטע הכביש המהיר הייתה קבועה וגדולה פי 2 ממהירות הנסיעה שלה בקטע הכביש העירוני. המכוניות נפגשו באמצע הקטע AB.
- א. מצאו פי כמה גדולה מהירות הנסיעה של מכונית א' בקטע הכביש המהיר ממהירות הנסיעה של מכונית ב' בקטע הכביש המהיר.
- ב. כאשר הגיעה מכונית א' ליישוב B, הייתה מכונית ב' בקטע הכביש העירוני, במרחק 18 ק"מ מיישוב A.
- ג. מצאו את המרחק בין יישוב A ובין יישוב B.
- כאשר הגיעה מכונית א' ליישוב B היא מייד יצאה חזרה לכיוון היישוב A, וכאשר הגיעה מכונית ב' ליישוב A היא מייד יצאה חזרה לכיוון היישוב B.
- בדרך חזרה נפגשו המכוניות בקטע הכביש המהיר.
- ד. מצאו באיזה מרחק מן היישוב B נפגשו המכוניות בדרך חזרה.

2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם a_1, a_2, a_3, \dots , ובה m איברים (m הוא מספר טבעי גדול מ-4). נתון: כל איברי הסדרה A הם שליליים.

סכום $m - 4$ האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 16 מסכום $m - 4$ האיברים הראשונים בסדרה.

א. (1) מצאו את מנת הסדרה A .

(2) האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אינסופית.

נתונה סדרה אינסופית B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{k^n}{a_n}$ לכל n טבעי. k הוא פרמטר שונה מ-0.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות k .

נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.

ג. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k .

נתון: מנת הסדרה B היא $\frac{1}{4}$.

סכום הסדרה B הוא -7 .

ד. מצאו את הערך של k ואת הערך של b_1 .

בסדרה B מחקו כל איבר שלישי (b_3, b_6, b_9, \dots).

ה. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

3. בכד א' יש 10 כדורים אדומים ו-15 כדורים צהובים, ובכד ב' יש רק כדורים אדומים.

דנה בוחרת באקראי כד ומוציאה ממנו באקראי כדור.

אם הכדור צהוב, היא מוציאה באקראי כדור שני מאותו הכד (הוצאה ללא החזרה).

אם הכדור הראשון אדום, היא מחזירה את הכדור לכד ושוב מוציאה באקראי כדור מאותו הכד.

א. ידוע שדנה הוציאה שני כדורים באותו הצבע. מהי ההסתברות ששניהם צהובים?

דנה מחזירה לכד את הכדורים שהוציאה.

יעל מבצעת את תהליך הזה:

היא בוחרת באקראי כד, מוציאה ממנו באקראי כדור אחד ומחזירה אותו לכד.

יעל חוזרת על תהליך זה עד שהיא מוציאה כדור אדום, מחזירה אותו לכד ומפסיקה להוציא כדורים.

ב. מצאו את ההסתברות שיעל ביצעה תהליך זה 6 פעמים בדיוק.

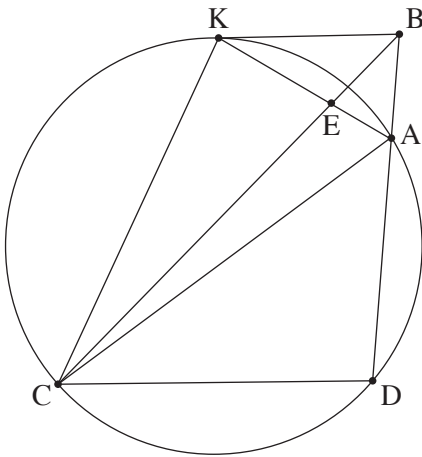
העבירו חלק מן הכדורים מכד ב' לכד א'.

לאחר מכן בחרו באקראי כד והוציאו ממנו באקראי כדור אחד.

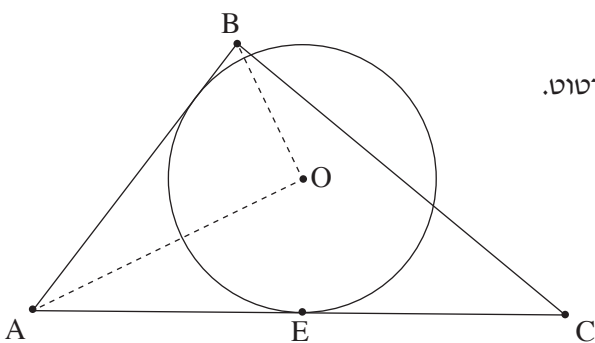
נתון כי לאחר ההעברה ההסתברות שהכדור שהוציאו היה אדום היא $\frac{21}{26}$.

ג. האם ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב' 13 כדורים? נמקו את תשובתכם.

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. במרובע BKCD הצלע KB מקבילה לצלע CD.
 הצלע CD היא מיתר במעגל והצלע KB משיקה למעגל בנקודה K.
 הצלע BD חותכת את המעגל בנקודה A.
 האלכסון BC חותך את המיתר AK בנקודה E (ראו סרטוט).
 א. הוכיחו כי $\triangle ABK \sim \triangle AKC$.
 ב. הוכיחו כי $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$.
 נתון: $BE = \frac{1}{4}CE$.
 ג. מצאו את היחס $\frac{AK}{AB}$.
 נתון: שטח המרובע ABKC הוא 24.
 נסמן ב-S את שטח המשולש AEB.
 ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש KEC.



5. נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
 מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו-AC המשיקים למעגל.
 הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, כמתואר בסרטוט.
 נתון: $BO \perp AO$, $AE = CE$.
 נסמן ב- 2β את הזווית BAC.
 א. הביעו באמצעות R ו- β את האורך של AB.
 נתון כי האורך של AB הוא $2.5R$,
 והזווית BAC היא זווית חדה.
 ב. מצאו את הערך של β .
 ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB.
 נתון כי האורך של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10.
 ד. מצאו את הערך של R.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתון כי $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - a^2)^3}$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות באותו התחום.

בסעיפים א-ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

ג. מצאו פונקצייה $f(x)$ המקיימת תנאים אלה.

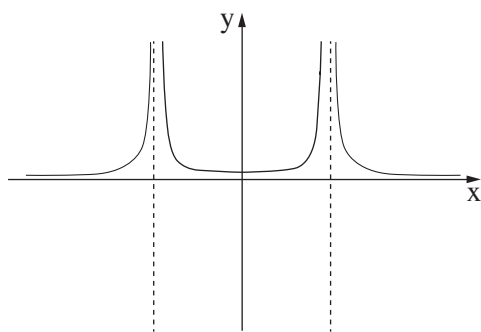
נתונות הפונקצייה $g(x) = \frac{x - a}{(x^2 - a^2)^2}$ והפונקצייה $h(x) = \frac{(x - a)^2}{(x^2 - a^2)^2}$.

הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

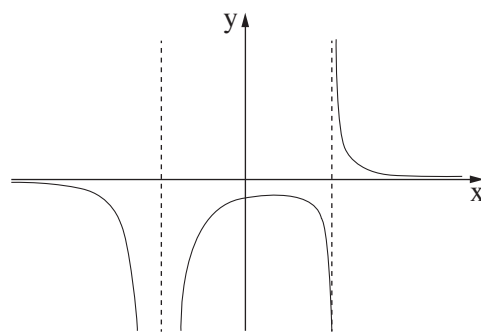
ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים I-IV שבסוף השאלה. נמקו את תשובותיכם.

נתון כי לפונקצייה $h(x - 3)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה $x = 0.2a$.

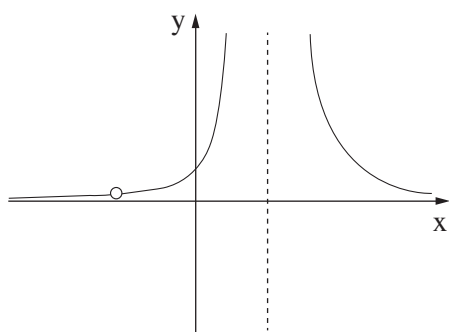
ה. מצאו את הערך של a .



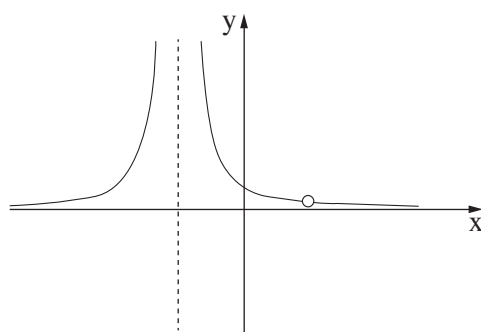
II



I



IV



III

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \cos x + \frac{6}{(\cos x)^2} + a$, בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי גרף הפונקצייה $f(x)$ משיק לישר $y = 6$ בשתי נקודות.

ג. מצאו את הערך של a.

הציבו $a = 1$ וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונות הפונקצייה $g(x) = f(x) - k$ והפונקצייה $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, שתיהן בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.
k הוא פרמטר, $k \neq 6$, $k \neq 8$.

ו. מצאו את הערך של k שבעבורו גרף הפונקצייה $g(x)$ וגרף הפונקצייה $h(x)$ נפגשים בכל אחת מנקודות הקיצון שלהן.

8. נתונה הפונקצייה $f(x) = x\sqrt{40-x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת ואין לה נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם החלק החיובי של ציר ה-x.

מן הנקודה A העבירו שני אנכים:

אנך אחד לציר ה-x החותך אותו בנקודה B, ואנך נוסף לישר $x = 40$ החותך אותו בנקודה D.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן ABCD הוא מקסימלי.

בהצלחה!